Exercice 14 :

1°/ Calculer à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales :

$\mathcal{A} = \int_1^2 \ln(1+x)\ dx$ et $\mathcal{B} = \int_1^2 \ln(-x+3)\ d\ x$

2°/ En déduire les intégrales :

$C = \int_1^2 \ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\ dx$ et $\mathcal{D} = \int_1^2 \ln\sqrt{|x^2-2x-3|}\ dx$

Exercice 15 :

Soit $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$

1°/ Prouver que $U_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq U_n - \frac{1}{n}$.

2°/a) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n} + \ln n \leq U_n \leq 1 + \ln n$.

b) Calculer alors $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 16 :

Soit n un entier ≥ 1.

1°/ Démontrer que pour tout entier k, compris entre 0 et $n-1$, on a :

$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\ dx \leq \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n}).$$

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$.

a) Prouver que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x\ dx \leq U_n$.

b) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite convergente vers une limite l.